Matemáticas Discretas (MA – 3421)
Guía de Ejercicios Nº 2

1.- Determine cuáles de las siguientes relaciones f ,entre los conjuntos A y B dados, son funciones:

(a) $f = \{(x, y) \in A \times B : y = x^2 + 3\}$, donde A = B = $\mathbb{Z}$

(b) $f = \{(x, y) \in A \times B : y^2 = x\}$, donde A = B = $\mathbb{R}$

(c) $f = \{(-1,1),(1,1),(2,4),(-2,4)\}$, donde A={-2,-1,0,1,2} y B={1,2,3,4}.

(d) $f = \{(c, b),(a, b),(b, d)\}$, donde A={b,a,c} y B= {d,b,c,a}

2.- ¿Define la regla $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ una función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? ¿Una función f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$? ¿Una función f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$?

3.-Sea g: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por g(n) = 2n. Encuentre $g \circ f$, si A ={1,2,3,4} y f: A $\rightarrow \mathbb{N}$ está dada por f = {(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)}.

4.- Sean f,g : $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, donde f(x) = x + 1 y g(x) = máx{1, x- 1} (máximo entre 1 y x-1):

(a)¿Cuál es la imagen de f?
(b)¿Es f sobreyectiva?
(c)¿Es f inyectiva?
(d)¿Cuál es la imagen de g?
(e)¿Es g sobreyectiva?
(f) ¿Es g inyectiva?
(g)Pruebe que $g \circ f = i$
(h) Determine $(f \circ g)(x)$ para x=2,3,4,7,12,25

5.- Sean f,g : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ funciones definidas por f(a) = a + 1 y g(b) = b^2 + 2. Determine:

(a) $(g \circ f)(-2)$
(b) $(f \circ g)(-2)$
(c) $(g \circ f)(x)$
(d) $(f \circ g)(x)$
(e) $(f \circ f)(y)$
(f) $(g \circ g)(y)$

6.- Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ funciones. Defina $h : A \times C \rightarrow B \times D$ como:

$$h(a, b) = (f(a), g(b))$$

Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces h es biyectiva

7.- Determine si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas si se consideran como funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ y, luego como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x - 3$ (c) $f(x) = 3x + 1$ (d) $f(x) = x^2 - 1$

8.- Dadas las siguientes funciones:

$f = \{(1,c),(2,a),(3,b),(4,c)\}$

$g = \{(a,2),(b,1),(c,4)\}$

$h = \{(1,A),(2,B),(3,D),(4,D)\}$

Hallar:

(a) $g \circ f$ (b) $h \circ (g \circ f)$ (c) $h \circ g$ (d) $f \circ g$

9.- Determine si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

(a) f: Z x Z → Z definida por $f((a,b))=b$

(b) f: Z→{0,1} definida por $f(a)=\begin{cases} 0 & \text{si a es par} \\ 1 & \text{si a es impar} \end{cases}$

10.- Pruebe que en cualquier conjunto de 12 enteros hay dos cuya diferencia es divisible por 11.

11.- ¿Cuántas veces debemos lanzar un solo dado para obtener el mismo resultado: (a) al menos dos veces? (b) al menos 3 veces? (c) al menos n veces, $n \geq 4$?

12.- A partir de 15 letras A, 20 letras B y 25 letras C, ¿cuántas letras deben escogerse de manera que siempre se incluyan 12 letras idénticas?

13.- ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 30 (inclusive) debemos seleccionar para garantizar que dos de ellos tienen máximo común divisor mayor que 1?

14.- (a) Si $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ y $|S| \geq 3$, demuestre que existen $x, y \in S$ distintos tales que $x + y$ es par
(b) Sea $S \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Encuentre el valor mínimo de $|S|$ que garantiza la existencia de distintos pares ordenados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S \times S$ tales que $x_1 + y_1$ y $x_2 + y_2$ sean ambos pares.

15.- Hay 5 caminos distintos desde el pueblo A hasta el pueblo B, 4 caminos distintos desde B hasta C y 3 caminos distintos desde A hasta C (sin pasar por B).
(a) ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir desde A hasta C pasando por B?
(b) ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir desde A hasta C, por todos los caminos posibles?

16.- Un hombre tiene 8 camisas, 4 pantalones y 5 pares de zapatos. ¿Cuántas combinaciones de ropa puede hacer? (R:160)

17.- Una clave de admisión de un banco consta de dos letras seguidas por dos dígitos. ¿Cuántas claves diferentes hay? (el alfabeto tiene 27 letras)(R: 72900).

18.- Sean A = {1,2,3,4,5] y B = {a,b,c,d,e,f,g}
(a) ¿Cuántas funciones hay de A en B? (R: 16807)
(b) ¿Cuántas funciones inyectivas hay de A en B? (R: 2520)
(c) ¿Cuántas funciones inyectivas hay de A en B tales que siempre envían a 2 en f y a 5 en g? (R: 60)
(d) ¿Cuántas funciones hay de A en B tales que 2 y 5 siempre se envían a d? (R: 343)
(e) ¿Cuántas funciones inyectivas hay de A en B tales que 4 nunca es enviado a f?
(R: 2160)

19.- Determine la cantidad de enteros de seis dígitos en los que:
(a) ningún dígito se puede repetir. (R: 136080)
(b) se pueden repetir los dígitos (R: $9x10^5$)
(c) ningún dígito se repite y el número es divisible entre 5 (R: 28560)
(d) ningún dígito se repite y el número es par (R: 68880).

20.- Se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo, y se registra el resultado de cada lanzada.
(a) ¿Cuántos resultados posibles hay? (R: 36)
(b) ¿En cuántos resultados posibles la suma es 4? (R: 3)
(c) ¿En cuántos resultados posibles la suma es 7 o es 11? (R: 8)
(d) ¿En cuántos resultados posibles sólo un dado muestra 2? (R: 10)

21.- Se forman cadenas de ocho bits y se desea saber:
(a) ¿Cuántas comienzan en 1100? (R: 16)
(b) ¿Cuántas tienen el segundo o el cuarto bit igual a 1? (R: 192)

22.- Demuestre que $n\mathrm{P}(n-1, n-1) = \mathrm{P}(n, n)$

23.- Determine el valor de n si se sabe que $2\mathrm{P}(n, 2) + 50 = \mathrm{P}(2n, 2)$

24.- ¿De cuántas maneras puede sentarse alrededor de una mesa circular 7 damas y 7 caballeros si las damas y los caballeros deben sentarse alternadamente? (R: 3628800)

25.- ¿De cuántas maneras pueden sentarse siete personas alrededor de una mesa circular, si dos de ellas insisten en sentarse juntas? (R: 240)

26.- ¿De cuantas maneras distintas se pueden sentar alrededor de una mesa circular cinco marcianos distintos y ocho jupiterianos distintos si ningún par de marcianos debe estar junto? (R: 7! x 6720)